



TITLE:

量子分解法による隣接作用素のスペクトル解析:  $l$  個数作用素が現れない場合 ( $C^*$ -環の諸相)

AUTHOR(S):

洞, 彰人; 尾畑, 伸明

---

CITATION:

洞, 彰人 ...[et al]. 量子分解法による隣接作用素のスペクトル解析:  $l$  個数作用素が現れない場合 ( $C^*$ -環の諸相). 数理解析研究所講究録 2002, 1291: 11-44

ISSUE DATE:

2002-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42532>

RIGHT:

# 量子分解法による隣接作用素のスペクトル解析

## I: 個数作用素が現れない場合

洞 彰人 (Akihito Hora)<sup>1)</sup>

尾畑 伸明 (Nobuaki Obata)<sup>2)</sup>

### はじめに

代数的確率論の枠組みにおいては, 古典的な確率変数が量子分解される. 古典的な確率変数列に対する中心極限定理も量子的因子に対する量子中心極限定理として議論される. このアイデアをグラフの隣接作用素 ( $\approx$  組合せ的ラプラス作用素) に適用して, そのスペクトルの性質を調べることができる. 量子分解のアイデアを最初に明示的に取り扱ったものは, Hashimoto [14] であり, 群のケーリーグラフに関連した量子中心極限定理を示した. Hashimoto-Obata-Tabei [16], Tabei [34] では, 距離正則グラフの一例となる Hamming グラフに対して同様のアイデアを適用した. さらに, Coxeter 群や Johnson グラフに関する具体的な計算結果は Hashimoto-Hora-Obata [15] で報告した. 自己完結的なサーベイは Hora-Obata [22] にある. なお, これらの一連の研究の端緒は Hora [18] による代数的確率論の枠組みを用いた距離正則グラフ上の隣接行列のスペクトル解析である. そこでは, 量子分解によらず, 古典的な結果を援用しながら極限分布が導出されている.

本論文の目的は, これまでの結果をサーベイするとともに, 隣接作用素に対する量子中心極限定理をより弱い仮定の下で証明することにある. 定理 3.3 が新しい結果である. 加えて, いくつかの例を示した. さらに, 主定理の仮定を洗練した結果, 極限が 1 モード相互作用フォック空間で記述できるための簡単な必要条件が導かれる (命題 5.2). それは, Fendler [12] や Młotkowski [29] が別の文脈で導入している確率的補間法を我々の枠組みに取り込む上での困難を示唆するものである. この困難を乗り越えるためには, 多モードの相互作用フォック空間の議論が必要となるかも知れない. もしそうなら多変数の直交多項式とも関連し, 関連する議論はますます面白くなるであろう. これとは別の方向性をもった話題として, Hora [20] によるヤング図形の成長列に付随する“フォック空間”の議論があるが, 紙数の都合上, それは本論文の続編 [23] で取り上げる予定である. 量子分解法の今後の発展を期待したい.

なお, 本論文には, 明らかに発展途上であるような議論や備忘録的な記述も含まれている. これらは冗長さの原因ではあるが, 理解の手助けになる可能性もあるので読者の寛容を願う.

**謝辞** やや畑違いながら, 本論文を発表する機会を与えて下さった佐野隆志氏 (山形大学) に感謝したい. 本論文で取り扱った問題のいくつかは, JSPS-PAN Joint Research Project “Infinite Dimensional Harmonic Analysis” の下で研究された. W. Młotkowski 氏と R. Lenczewski 氏との議論は有益であった. ここに感謝したい.

<sup>1)</sup> 岡山大学・環境理工学部. E-mail: hora@ems.okayama-u.ac.jp

<sup>2)</sup> 東北大学・大学院情報科学研究科. E-mail: obata@math.is.tohoku.ac.jp

## 1 代数的確率論の諸概念

### 1.1 代数的確率空間

単位元付きの  $*$ -代数  $\mathcal{A}$  とそれ上の状態  $\phi$  の組  $(\mathcal{A}, \phi)$  を代数的確率空間という。状態  $\phi$  とは  $\mathcal{A}$  上で定義された  $\mathbb{C}$ -値線形関数であって、 $\phi(a^*a) \geq 0$  と  $\phi(1) = 1$  をみたすものをいう。各  $a \in \mathcal{A}$  を代数的確率変数または単に確率変数という。特に  $a = a^*$  をみたすときには実確率変数という。

さて、異なった代数的確率空間  $(\mathcal{A}, \phi), (\mathcal{B}, \psi)$  の確率変数  $a, b$  が確率同値であるとは、

$$\phi(a^{\epsilon_1} a^{\epsilon_2} \dots a^{\epsilon_m}) = \psi(b^{\epsilon_1} b^{\epsilon_2} \dots b^{\epsilon_m})$$

がすべての  $m = 1, 2, \dots$  とすべての組合せ  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$  に対して成り立つときにいう。実確率変数に対してはモーメント列  $\phi(a^m)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , が確率変数を特徴づけることになる。

次に、確率変数の列  $a_1, a_2, \dots$  を考えよう。それぞれの確率変数  $a_n$  は代数的確率空間  $(\mathcal{A}_n, \phi_n)$  において定義されているものとする。このとき、さらに別の代数的確率空間  $(\mathcal{B}, \psi)$  とそこで定義されている確率変数  $b \in \mathcal{B}$  があって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(a_n^{\epsilon_1} a_n^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_m}) = \psi(b^{\epsilon_1} b^{\epsilon_2} \dots b^{\epsilon_m})$$

がすべての組合せ  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , に対して成り立っているとき、 $b$  を  $\{a_n\}$  の確率極限という。また、 $\{a_n\}$  は  $b$  に確率収束するという。

詳しくは、アカルディ-尾畑 [4] を参照されたい。

### 1.2 相互作用フォック空間

数列  $\{\lambda_n\}$  を与えるごとに定義される。ただし、 $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots \geq 0$  であり、もし  $\lambda_m = 0$  となる  $m \geq 1$  が存在するときはその先のすべての  $n \geq m$  で  $\lambda_n = 0$  となっているものとする。言い替えると、ここで考える数列は  $\lambda_0 = 1$  から始まり正数のみをとる無限列か、または有限列ということである。その無限か有限かによって無限次元または有限次元ヒルベルト空間を定義する：

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathbb{C} \Phi_n, \quad \Gamma = \sum_{n=0}^{m_0-1} \oplus \mathbb{C} \Phi_n,$$

ここで  $m_0$  は  $\lambda_{m_0} = 0$  となる最初の番号である。また、 $\{\Phi_n\}$  は正規直交基底を一組固定して考えることを明示するものである。

次に線形作用素  $B^\pm$  を

$$B^+ \Phi_n = \sqrt{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}} \Phi_{n+1}, \quad n \geq 0,$$

$$B^- \Phi_0 = 0, \quad B^- \Phi_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}} \Phi_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

によって定義する. ただし,  $\Gamma$  が有限次元の時は,  $B^+\Phi_{m_0-1} = 0$  とおく. 自然な定義域を考えてやれば,  $B^\pm$  が閉作用素に拡張され (場合によっては有界作用素にもなる), それらは互いに共役であることが容易にわかる. 以下では, 定義域に関わる微妙な議論は必要としない. こうして得られた四つ組  $\Gamma(\{\lambda_n\}) = (\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  を  $\{\lambda_n\}$  に付随した相互作用フォック空間と呼ぶ. いつも通り,  $B^-$  を消滅作用素,  $B^+$  を生成作用素と呼ぶ.

簡単な計算によって,

$$\begin{aligned} B^+B^-\Phi_0 &= 0, \quad B^+B^-\Phi_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\Phi_n, \quad n \geq 1, \\ B^-B^+\Phi_n &= \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\Phi_n, \quad n \geq 0, \\ B^{+n}\Phi_0 &= \sqrt{\lambda_n}\Phi_n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

さらに個数作用素  $N$  を

$$N\Phi_n = n\Phi_n, \quad n \geq 0,$$

のように定義する.

最も基本的な相互作用フォック空間 3 つを列挙しよう.

**命題 1.1** 数列  $\lambda_n = n!$  に付随する相互作用フォック空間  $\Gamma_{\text{boson}} = (\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  は (1 モード) ボゾンフォック空間と呼ばれ, ボゾン交換関係:  $B^-B^+ - B^+B^- = 1$  が成り立つ. さらに,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ここで, 右辺に現れている確率分布は標準 Gauss 分布 (つまり, 平均 0, 分散 1) である.

**命題 1.2** 数列  $\lambda_0 = \lambda_1 = 1, \lambda_n = 0, n \geq 2$ , に付随する相互作用フォック空間  $\Gamma_{\text{fermion}} = (\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  は (1 モード) フェルミオンフォック空間と呼ばれ, フェルミオン交換関係  $B^-B^+ + B^+B^- = 1$  が成り立つ. さらに,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle_\Gamma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

右辺の確率分布は Bernoulli 分布である.

**命題 1.3** 数列  $\lambda_n = 1, n \geq 0$ , に付随する相互作用フォック空間  $\Gamma_{\text{free}} = (\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  は (1 モード) 自由フォック空間と呼ばれ, 自由交換関係  $B^-B^+ = 1$  が成り立つ. さらに,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4 - x^2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

右辺の確率分布は, Wigner 半円則と呼ばれる.

**注意 1.4** 上記の3つの交換関係は、いわゆる  $q$ -交換関係  $B^-B^+ - qB^+B^- = 1$ ,  $-1 \leq q \leq 1$ , の特別なものである。これは、

$$\lambda_n = [n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, \quad [n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1},$$

に付随する相互作用フォック空間  $\Gamma_q = (\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  によって実現される。さらに、

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle_{\Gamma_q} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_q(dx) \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

をみたす確率分布  $\mu_q$  は  $q$ -変形 Gauss 分布と呼ばれる。  $-1 < q < 1$  のとき、 $\mu_q$  はコンパクト台  $[-2/\sqrt{1-q}, 2/\sqrt{1-q}]$  をもち、Lebesgue 測度に関して絶対連続である。密度関数は、

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) \sqrt{4 - (1-q)x^2} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{(1-q)q^k x^2}{(1+q^k)^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin \theta \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) |1 - q^k e^{2i\theta}|^2, \quad |x| \leq \frac{2}{\sqrt{1-q}}, \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 $\theta \in [0, \pi]$  は  $x\sqrt{1-q} = 2 \cos \theta$  によって定める。関連する事項は、例えば、Bożejko-Kümmerer-Speicher [8] とそこに引用されている文献を参照されたい。

### 1.3 直交多項式

相互作用フォック空間と直交多項式との基本的な関連を初めて明らかにしたのは Accardi-Bożejko [1] である。

実数直線  $\mathbf{R}$  上の確率測度  $\mu$  ですべての次数のモーメントが有限

$$\int_{\mathbf{R}} |x|^m \mu(dx) < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

となるものだけを考える。Gram-Schmidt 直交化法によって単項式の列  $1, x, x^2, \dots$  から直交多項式  $\{P_n\}$  が得られる。ただし、 $P_n(x) = x^n + \dots$  のように基準化するものとする。このとき、直交性によって隣接3項間漸化式が成り立つ：

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - \alpha_1, \\ xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

ここに現れる2組の数列  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in \mathbf{R}$  と  $\omega_1, \omega_2, \dots \geq 0$  は直交多項式を特徴づける。これらを Szegő-Jacobi 定数と呼ぶ。

測度  $\mu$  が丁度  $m_0$  個の点に乗っている離散測度のときは、直交多項式  $\{P_n\}$  は  $n = m_0 - 1$  で終わり、Szegő-Jacobi 定数は2組の有限数列  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_0}$  と  $\omega_1, \dots, \omega_{m_0-1}$  になる。最後の定数は、(1.2) において  $P_{n+1} = 0$  として決定される。測度  $\mu$  が対称であることと  $\alpha_n = 0$  がすべての  $n \geq 1$  で成り立つことは同値である。

**定理 1.5** (Accardi–Bożejko [1]) 確率測度  $\mu$  に付随する直交多項式を  $\{P_n\}$  とし, その Szegő–Jacobi 定数を  $\{\alpha_n\}$  と  $\{\omega_n\}$  とする. 数列  $\{\lambda_n\}$  を

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \omega_1, \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \omega_{n+1},$$

で定義し, 付随する相互作用フォック空間を  $\Gamma(\mathbf{C}, \{\lambda_n\})$  とする. このとき,  $\Gamma(\mathbf{C}, \{\lambda_n\})$  から  $L^2(\mathbf{R}, \mu)$  への等距離写像  $U$  で次の性質をもったものが一意的に存在する:

$$U\Phi_0 = P_0, \quad UB^+U^*P_n = P_{n+1}, \quad Q = U(B^+ + B^- + \alpha_{N+1})U^*,$$

ここで  $Q$  は  $x$  によるかけ算作用素であり,  $L^2(\mathbf{R}, \mu)$  に稠密な定義域をもつ.

実際,  $U: \sqrt{\omega_1 \dots \omega_n} \Phi_n \mapsto P_n$  が求めるものとなる.

**注意 1.6** 次は同値な条件である:

- (i)  $U$  がユニタリ.
- (ii)  $U$  は  $L^2(\mathbf{R}, \mu)$  の上への写像.
- (iii) 多項式全体が  $L^2(\mathbf{R}, \mu)$  の稠密な部分空間となっている.

さらに, この条件はいわゆる determinate moment problem と関連する. 例えば, Deift [11]. なお, 上記の条件が一般には成り立たないことは, Stieltjes の例から知られる:

$$\mu(dx) = \begin{cases} x^{-\log x} dx, & x \in [0, \infty) \\ 0, & \text{その他.} \end{cases}$$

実際,  $\mu$  は有限測度であり, すべての次数のモーメントをもつが,  $\sin(2\pi \log x)$  がすべての多項式と直交することは容易にわかる.

ついでに,  $\mu$  の Cauchy 変換と直交多項式を直接結びつける公式を思い出しておこう (例えば, [10]). まず,

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mu(dx)}{z - x}, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \text{Im } z > 0,$$

を  $\mu$  の Cauchy 変換という. すべての次数のモーメントが有限であることから,  $G_\mu(z)$  は次の形に連分数展開される:

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2 - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3 - \frac{\omega_3}{z - \alpha_4 - \dots}}}}$$

これを第  $n$  項で切れば,  $z$  の有理関数になる. その有理関数は, 分子  $Q_n(z)$  が  $n$  次多項式, 分母  $P_{n+1}$  が  $n+1$  次多項式で, とともに最高次の項の係数を 1 と基準化して表すことができる.

$$\frac{Q_n(z)}{P_{n+1}(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1 - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2 - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3 - \frac{\omega_3}{z - \alpha_4 - \dots z - \alpha_{n+1}}}}}.$$

このとき、まさに分母の多項式が  $\mu$  に付随する直交多項式に一致し、 $\{\alpha_n\}, \{\omega_n\}$  は (1.2) で定まる Szegő-Jacobi 定数に他ならない。なお、 $\{Q_n\}$  は  $\mu$  の随伴直交多項式と呼ばれ、

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \\ Q_1(x) = x - \alpha_2, \\ xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + \alpha_{n+2}Q_n(x) + \omega_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

によって一意的に定まる。

#### 1.4 位置変数の量子分解

量子力学では、 $x$  によるかけ算作用素  $Q$  は位置を表す。  $Q$  によって生成される  $*$ -代数  $\mathcal{A}$  と

$$\phi(a) = \langle P_0, aP_0 \rangle_{L^2(\mathbf{R}, \mu)}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

として定義される状態  $\phi$  を組にして代数的確率空間  $(\mathcal{A}, \phi)$  を考える。一方、相互作用フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_m\}, B^+, B^-)$  から自然に代数的確率空間が構成される。すなわち、 $B$  を  $B^+, B^-, \alpha_{N+1}$  から生成される  $*$ -代数とし、 $\psi$  を真空状態:

$$\psi(b) = \langle \Phi_0, b\Phi_0 \rangle_{\Gamma}, \quad b \in B,$$

ととるのである。定理 1.5 から

$$\phi(Q^m) = \psi((B^+ + B^- + \alpha_{N+1})^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

言い替えれば、

$$\int_{\mathbf{R}} x^m \mu(dx) = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + \alpha_{N+1})^m \Phi_0 \rangle_{\Gamma}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

つまり、2つの確率変数  $Q$  と  $B^+ + B^- + \alpha_{N+1}$  は確率同値なのである。この意味で、

$$Q = B^+ + B^- + \alpha_{N+1},$$

と分解される。これが量子分解 (の原型) である。

#### 1.5 古典確率変数の量子分解

古典 (測度論的) 確率空間で定義された実確率変数  $X$  ですべての次数のモーメントが存在するものと仮定する:  $E(|X|^m) < \infty$ . その分布を  $\mu$  で表し、 $L^2(\mathbf{R}, \mu)$  上作用する  $x$  によるかけ算作用素を  $Q$  とする。前節の結果とあわせると、

$$E(X^m) = \phi(Q^m) = \psi((B^+ + B^- + \alpha_{N+1})^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

であり、古典確率変数  $X$  と代数的確率変数  $Q$  が確率的に同一視される。この場合、 $X = B^+ + B^- + \alpha_{N+1}$  と表し、 $X$  の量子分解と呼ぶ。

**注意 1.7** モーメント問題からわかるように,  $X$  の分布  $\mu$  は  $X$  のモーメント列から完全に再現できるとは限らないので, 代数的確率論における確率同値は, 分布の一致による古典確率論の確率同値よりも弱い概念である. しかしながら, Carleman の判定条件 (例えば, [32, Theorem 1.10]) としてよく知られているように, モーメント列  $\{m_n\}$  が

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} = \infty$$

をみたしているときは, そのモーメント列に対応する確率測度は一意的である (逆は不成立). 特に, 確率測度がコンパクト台をもつときは, そのモーメント列を再現する確率測度は他にはない.

**例 1.8 (Bernoulli 型確率変数)**  $P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2$  で定義される Bernoulli 型確率変数  $X$  の量子分解は命題 1.2 で定義したフェルミオンフォック空間の生成・消滅作用素を用いて  $X = B^+ + B^-$  と表される. さらに, 具体的な行列表示に移れば,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これは, しばしば量子コイン投げとも呼ばれる. より一般の Bernoulli 型確率変数  $X$ :  $P(X = +1) = p$ ,  $P(X = -1) = 1 - p$  を考えよう. 分布は  $\mu = p\delta_{+1} + (1 - p)\delta_{-1}$ . 直交多項式の計算から

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - (2p - 1) \\ xP_1(x) &= (1 - 2p)P_1(x) + 4p(1 - p)P_0(x). \end{aligned}$$

よって,  $\alpha_1 = 2p - 1$ ,  $\alpha_2 = 1 - 2p$ ,  $\omega_1 = 4p(1 - p)$ . したがって, 数列  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = 4p(1 - p)$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0$  に付随する相互作用フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  によって量子分解される:

$$\begin{aligned} X &= B^+ + B^- + \alpha_{N+1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{p(1-p)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{p(1-p)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2p & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**例 1.9** 標準 Gauss 分布に従う確率変数  $X$  は, 命題 1.1 で定義したボゾンフォック空間の生成・消滅作用素によって,  $X = B^+ + B^-$  と量子分解される.

**例 1.10**  $X$  をパラメータ  $\lambda > 0$  の Poisson 分布に従う確率変数とする, すなわち,  $P(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . このとき,  $X$  はボゾンフォック空間  $(\Gamma, \{n!\}, B^+, B^-)$  によって量子分解される:

$$X = (B^+ + \sqrt{\lambda})(B^- + \sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}(B^+ + B^-) + N + \lambda.$$

$N = B^+B^-$  は個数作用素である.



確率過程の量子分解には興味がある. 例えば, ブラウン運動は生成過程と消滅過程の和に分解される:  $B_t = A_t + A_t^*$ . ただし, これらの作用素は  $L^2(\mathbf{R})$  上のボゾンフォック空間上の作用素であり, 我々が専ら扱っている 1 モードの場合とは異なり, 無限モードの空間上で定義される. 実際, この分解は Hudson-Parthasarathy [25] による伊藤解析の量子的拡張の出発点になるものである. さらに, ホワイトノイズ超関数論を用いれば, ブラウン運動の時間微分であるホワイトノイズが定式化され, それは, 量子ホワイトノイズに量子分解されるのである:  $W_t = a_t + a_t^*$ . この分解は, 伊藤理論を越えて, 特異なノイズを含む確率微分方程式 (ホワイトノイズ方程式) の基礎を与えるものとなる. 例えば, Chung-Ji-Obata [9].

## 2 隣接行列の量子分解

### 2.1 グラフ理論の用語

空でない集合  $V$  にその 2 点からなる集合  $E \subset \{\{x, y\}; x, y \in V, x \neq y\}$  を考えあわせたものをグラフといい,  $\mathcal{G} = (V, E)$  で表す.  $V, E$  ともに有限集合であるとき有限グラフと呼ばれる. 我々の扱うグラフは有限とは限らない.

図形的な表現を念頭において,  $V$  の元を頂点,  $E$  の元を辺という.  $\{x, y\} \in E$  のとき,  $x$  と  $y$  は隣接するといい,  $x \sim y$  のように表す. 頂点  $x \in V$  に対して定義される量

$$\kappa(x) = |\{y \in V; y \sim x\}|$$

を  $x$  の次数または分岐数という. 各頂点の次数  $\kappa(x) = \kappa \geq 1$  が一定であるグラフを正則グラフ (または, より詳しく  $\kappa$ -正則グラフ) と呼ぶ. 以上の定義によれば,  $\kappa$ -正則グラフ  $\mathcal{G} = (V, E)$  では  $|V| \geq 2$  が成り立つ.

有限列  $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$  で, 各  $i = 0, 1, \dots, n-1$  に対して  $x_i \sim x_{i+1}$  となっているものを ( $x_0$  と  $x_n$  を結ぶ) 長さ  $n$  の道という. ここで  $x_0, x_1, \dots, x_n$  の中には同じものがあってもかまわない<sup>3)</sup>. 任意の 2 点が道で結ばれるようなグラフは連結であるという. グラフの 2 点  $x, y \in V$  に対して, その 2 点を結ぶ道のうちで最短なものの長さを, その 2 点の距離といい  $\partial(x, y)$  で表す. 明らかに,  $x \sim y$  と  $\partial(x, y) = 1$  は同値である. グラフの直径が  $\sup\{\partial(x, y); x, y \in V\}$  で定義される.

グラフ  $\mathcal{G} = (V, E)$  に対して第  $i$  隣接行列  $A_i = (A_i)_{xy}$ ,  $x, y \in V$ , が

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1, & \partial(x, y) = i, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases} \quad (2.1)$$

で定義される. 第 1 隣接行列を  $A = A_1$  で表す. 単に隣接行列というときは  $A$  を指す.

集合  $V$  に対して,  $E$  を与えてグラフ構造を導入することと, 対角成分は 0 で他の成分は 0, 1 のみをとる対称行列  $(A_{xy})_{x, y \in V}$  を与えることは同値である.

<sup>3)</sup> グラフ理論のより標準的な用語では,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  がすべて異なるときに  $x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_{n-1} \sim x_n$  を長さ  $n$  の道 (path) といい,  $x_0, x_1, \dots, x_n$  に重複を許すときには歩道 (walk) という. 本論文では, 標準の意味での道を用いないので, 簡単のためにこのような定義をした

## 2.2 代数的確率変数としての隣接行列

まず、隣接行列  $A$  に対して  $A^n$  が定義されることに注意しよう。実際、 $A^n$  の  $(x, y)$ -成分は、 $x$  と  $y$  を結ぶ長さ  $n$  の道の個数である。すでに注意したように、道というときは同じ辺を往復するようなものも含まれている。明らかに、 $0 \leq (A^n)_{xy} \leq \kappa^n$ 。したがって、 $A$  の生成する  $*$ -代数が定義されるが、これを  $\mathcal{A}$  で表す。

隣接行列  $A$  はヒルベルト空間  $\ell^2(V)$  に自然な仕方で作用する：

$$Af(x) = \sum_{y \in V} A_{xy} f(y) = \sum_{y \sim x} f(y), \quad f \in \ell^2(V).$$

$\|A\| = \kappa$  かつ  $\mathcal{A}$  は単射的に  $B(\ell^2(V))$  に埋め込まれる。一般に、 $\mathcal{A}$  上の状態  $\phi$  は問題によって選ばれる。この論文では、ある特定の点  $x_0 \in V$  の指示関数  $\delta_{x_0} \in \ell^2(V)$  によるベクトル状態：

$$\phi(a) = \langle \delta_{x_0}, a \delta_{x_0} \rangle, \quad a \in \mathcal{A},$$

を考えることが多い。フォック空間との類似から真空状態 (vacuum state) と呼ぶこともある。

こうして、隣接行列  $A$  を代数的確率空間  $(\mathcal{A}, \phi)$  の代数的確率変数として扱うというのが我々のアプローチである。

## 2.3 グラフの階層化と隣接行列の量子分解

今後、断りが無くとも考えるグラフ  $G = (V, E)$  は連結正則グラフとし、原点  $x_0 \in V$  が定まっているものとする。次数は  $\kappa \geq 1$  で表す。このとき、グラフには自然な階層構造が導入される：

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{x \in V; \partial(x_0, x) = n\}. \quad (2.2)$$

§2.1 に与えた定義によって、(2.2) は、少なくとも2階層以上をもつ ( $V_0 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset$ )。しかし、ある番号  $m \geq 2$  で  $V_m = \emptyset$  となれば、その先  $n \geq m$  すべてで  $V_n = \emptyset$  となる。(2.2) は、その場合も含んでいる。一般に、

$$|V_0| = 1, \quad |V_1| = \kappa, \quad |V_n| \leq \kappa(\kappa - 1)^{n-1}, \quad n \geq 2,$$

となっていることは見やすい。

**補題 2.1**  $x, y \in V$  を隣接する2点とする。このとき、 $x \in V_n, n \geq 0$ 、ならば、 $y \in V_{n-1} \cup V_n \cup V_{n+1}$ 。ただし、 $V_{-1} = \emptyset$  とする。

**証明** 三角不等式からの帰結である。図 2.1 から明らか。 ■

階層構造をもとに、グラフ  $G = (V, E)$  の向きづけ、すなわち、各辺  $x \sim y$  に向きを与える。 $x \in V_n$  なら、補題 2.1 により  $y \in V_{n-1} \cup V_n \cup V_{n+1}$ 。そこで、 $y \in V_{n+1}$  なら  $x < y, y \in V_{n-1}$

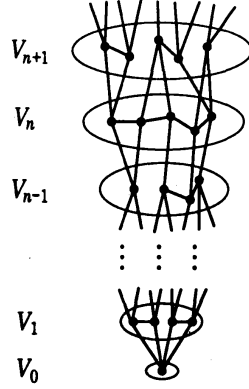


図 2.1: グラフ  $G = (V, E)$  の階層化.  $\kappa = 4$

なら  $x \succ y$  とする.  $y \in V_n$  のときは, 2通りの向き付けの一方を選ぶことにする. このような向き付けを1つ定めるごとに,

$$(A^+)_{yx} = \begin{cases} A_{yx} = 1 & y \succ x \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他,} \end{cases} \quad (A^-)_{yx} = \begin{cases} A_{yx} = 1 & y \prec x \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

同じことであるが, ヒルベルト空間  $\ell^2(V)$  への作用で表せば,

$$A^+ \delta_x = \sum_{y \succ x} \delta_y, \quad A^- \delta_x = \sum_{y \prec x} \delta_y, \quad (2.3)$$

のように定義する (図 2.2). 明らかに,  $(A^+)^* = A^-$  かつ

$$A = A^+ + A^-. \quad (2.4)$$

これを量子分解 (quantum decomposition) という. 量子分解はグラフの向き付けに依存して定まる.

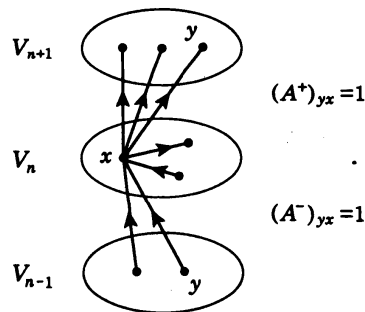


図 2.2: 量子分解:  $A = A^+ + A^-$

一般論を組み立てるには, もう少し細かく見るのがよいかも知れない. グラフを階層化した, 各階層間をつないでいる辺を全部取り除いてできる部分グラフ  $\hat{G}$  の隣接行列を  $\hat{A}$  と

しよう. つまり,

$$\mathring{A}_{xy} = \begin{cases} A_{xy} & x, y \text{ が同じ階層にあるとき,} \\ 0 & x, y \text{ が異なる階層にあるとき.} \end{cases}$$

とする. あらかじめ  $\mathcal{G}$  には  $A$  を量子分解するための向きづけが与えられている. 部分グラフ  $\mathring{\mathcal{G}}$  には, それから誘導される向きづけを与えることで,  $\mathring{A}$  も量子分解される:

$$\mathring{A} = \mathring{A}^+ + \mathring{A}^-. \quad (2.5)$$

定義から  $x \in V_n$  のとき,

$$\mathring{A}^+ \delta_x = \sum_{y \in V_n, y \succ x} \delta_y, \quad \mathring{A}^- \delta_x = \sum_{y \in V_n, y \prec x} \delta_y. \quad (2.6)$$

**注意 2.2** (2.4) と (2.5) から

$$A = (A^+ - \mathring{A}^+) + (A^- - \mathring{A}^-) + \mathring{A} \quad (2.7)$$

のように3成分に分解することも可能である. つまり,  $A$  を分解するにあたり, 同じ階層に属する辺に対しては向き付けせず, 第3番目の成分として独立に扱うことを意味する. グラフの階層化から定まるヒルベルト空間 (§2.4) とフォック空間との類似性を考えると, (2.7) の右辺は, 順に生成・消滅・個数作用素の類似と考えられ, 量子分解と呼ぶにより相応しいようにも見える. これについては機会をあたためて議論する.

## 2.4 グラフの階層化に付随するヒルベルト空間への作用

各  $x \in V$  に対して, 1点集合  $\{x\}$  の指示関数を  $\delta_x$  で表す. それらの全体  $\{\delta_x; x \in V\}$  はヒルベルト空間  $\ell^2(V)$  の正規直交基底となる. (2.2) に対応するように, ヒルベルト空間を定義しよう. まず,  $n \geq 0$  に対して

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x$$

とおく. ただし,  $V_n = \emptyset$  のときは  $\Phi_n$  は定義されないものとする<sup>4)</sup>. 明らかに,  $\{\Phi_n\}$  は  $\ell^2(V)$  の正規直交系となる.  $\mathcal{G}$  の階層化が有限で終わる (ある番号  $n \geq 2$  があって,  $V_{n-1} \neq \emptyset$ ,  $V_n = \emptyset$ ) か, 無限階層をもつかによって,  $\{\Phi_n\}$  は有限または無限となる. いずれにせよ,  $\{\Phi_n\}$  によって張られる  $\ell^2(V)$  の閉部分空間

$$\Gamma(\mathcal{G}) = \sum_n \oplus \mathbb{C} \Phi_n$$

をグラフ  $\mathcal{G}$  の階層化 (2.2) に付随するヒルベルト空間と呼ぶことにする.

<sup>4)</sup>  $\Phi_n = 0$  として記号の統一を図ることもできるが, あとから必要になる関係式の係数において  $0/0 = 1$  と規約する必要が出たりと, 便宜上のことは避けられない.

化に付随して定まるいくつかの統計量が必要になる.

補題 2.1 を念頭において, 各  $x \in V_n$ ,  $n \geq 0$ , に対して

$$\begin{aligned}\omega_+(x) &= |\{y \in V_{n+1}; y \succ x\}|, \\ \omega_-(x) &= |\{y \in V_{n-1}; y \prec x\}|, \\ \rho_+(x) &= |\{y \in V_n; y \succ x\}|, \\ \rho_-(x) &= |\{y \in V_n; y \prec x\}|,\end{aligned}$$

とおく. 無論,  $x \in V_0$ , つまり,  $x = x_0$  のときは  $\omega_+(x_0) = \kappa$ ,  $\omega_-(x_0) = \rho_+(x_0) = \rho_-(x_0) = 0$  である. 明らかに,

$$\omega_+(x) + \omega_-(x) + \rho_+(x) + \rho_-(x) = \kappa, \quad x \in V. \quad (2.8)$$

次に, 1つの階層  $V_n$  に注目して,  $\omega_\pm(x)$ ,  $\rho_\pm(x)$  の平均値と分散:

$$\begin{aligned}\omega_{\pm,n} &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \omega_\pm(x), \\ \sigma_{\pm,n}^2 &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} (\omega_\pm(x) - \omega_{\pm,n})^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \omega_\pm(x)^2 - \omega_{\pm,n}^2, \\ \rho_{\pm,n} &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \rho_\pm(x), \\ \tau_{\pm,n}^2 &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} (\rho_\pm(x) - \rho_{\pm,n})^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \rho_\pm(x)^2 - \rho_{\pm,n}^2,\end{aligned}$$

が重要な役割を演ずる.  $V_n = \emptyset$  のときは, これらはすべて 0 であるとする. また,

$$\omega_{-,0} = 0, \quad \omega_{-,1} = 1, \quad \sigma_{-,0} = \sigma_{-,1} = 0 \quad (2.9)$$

に注意しよう.

ところで,  $\rho_{\pm,n}$  は次のようにして求まる.  $\mathring{E}_n = \{\{x, y\} \in E; x, y \in V_n\}$  とおけば, 定義から  $\mathring{G}$  は互いに不連結な部分グラフ  $(V_n, \mathring{E}_n)$  の和と考えられる. 明らかに,

$$\sum_{x \in V_n} \rho_+(x) = |\{(x, y) \in V_n \times V_n; x \prec y\}| = |\mathring{E}_n| = \sum_{y \in V_n} \rho_-(y).$$

よって,

$$\rho_{+,n} = \rho_{-,n} = \frac{|\mathring{E}_n|}{|V_n|}.$$

さて,  $A^+$  の  $\Phi_n$  への作用から調べよう.

補題 2.3  $n \geq 0$  に対して,

$$A^+\Phi_n = \omega_{-,n+1} \frac{|V_{n+1}|^{1/2}}{|V_n|^{1/2}} \Phi_{n+1} + \frac{1}{|V_n|^{1/2}} \sum_{y \in V_{n+1}} (\omega_-(y) - \omega_{-,n+1}) \delta_y + \mathring{A}^+\Phi_n, \quad (2.10)$$

$$\mathring{A}^+\Phi_n = \rho_{-,n} \Phi_n + \frac{1}{|V_n|^{1/2}} \sum_{y \in V_n} (\rho_-(y) - \rho_{-,n}) \delta_y. \quad (2.11)$$

ただし,  $V_n \neq \emptyset$ ,  $V_{n+1} = \emptyset$  のときは,  $A^+\Phi_n = \mathring{A}^+\Phi_n$  とする.

**証明** 定義によって,

$$\begin{aligned} |V_n|^{1/2} A^+\Phi_n &= \sum_{x \in V_n} A^+\delta_x = \sum_{x \in V_n} \sum_{y \succ x} \delta_y \\ &= \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_{n+1}, y \succ x} \delta_y + \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n, y \succ x} \delta_y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

第1項は,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_{n+1}, y \succ x} \delta_y &= \sum_{y \in V_{n+1}} \omega_-(y) \delta_y \\ &= \sum_{y \in V_{n+1}} \omega_{-,n+1} \delta_y + \sum_{y \in V_{n+1}} (\omega_-(y) - \omega_{-,n+1}) \delta_y \\ &= \omega_{-,n+1} |V_{n+1}|^{1/2} \Phi_{n+1} + \sum_{y \in V_{n+1}} (\omega_-(y) - \omega_{-,n+1}) \delta_y. \end{aligned}$$

また, 第2項は,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n, y \succ x} \delta_y &= |V_n|^{1/2} \mathring{A}^+\Phi_n = \sum_{y \in V_n} \rho_-(y) \delta_y \\ &= \sum_{y \in V_n} \rho_{-,n} \delta_y + \sum_{y \in V_n} (\rho_-(y) - \rho_{-,n}) \delta_y \\ &= \rho_{-,n} |V_n|^{1/2} \Phi_n + \sum_{y \in V_n} (\rho_-(y) - \rho_{-,n}) \delta_y. \end{aligned}$$

よって示された. ■

補題 2.4  $n \geq 1$  に対して,

$$A^-\Phi_n = \omega_{+,n-1} \frac{|V_{n-1}|^{1/2}}{|V_n|^{1/2}} \Phi_{n-1} + \frac{1}{|V_n|^{1/2}} \sum_{z \in V_{n-1}} (\omega_+(z) - \omega_{+,n-1}) \delta_z + \mathring{A}^-\Phi_n, \quad (2.13)$$

$$\mathring{A}^-\Phi_n = \rho_{+,n} \Phi_n + \frac{1}{|V_n|^{1/2}} \sum_{y \in V_n} (\rho_+(y) - \rho_{+,n}) \delta_y. \quad (2.14)$$

$n = 0$  のときは,  $A^-\Phi_0 = \mathring{A}^-\Phi_0 = 0$  とする.

**証明** 補題 2.3 の証明と平行にできるので省略する. ■

## 2.5 基本的な課題

我々の興味は、グラフ  $G = (V, E)$  が大きな場合の隣接行列の性質である。これをグラフの成長列  $\{G_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  を考えて、隣接行列の漸近挙動から調べる。ここで  $\nu$  は有向無限集合を走るが、 $\nu_1 \leq \nu_2$  のとき  $G_{\nu_1}$  が  $G_{\nu_2}$  の部分グラフであること (グラフの帰納的系であること) を必ずしも要請しない。グラフの「成長列」といったのはそのためである。この  $\nu$  を成長パラメータと呼ぶことにする。

$G_\nu$  の隣接行列を  $A_\nu$ 、その量子分解を  $A_\nu = A_\nu^+ + A_\nu^-$  とする ((2.4) を見よ)。基本的な問題は、 $Z_\nu$  を正規化定数として、極限

$$C^\pm = \lim_{\nu} \frac{A_\nu^\pm}{Z_\nu} \quad (2.15)$$

を記述する相互作用 フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  を構成することである。補題 2.3, 2.4 に示されているように、 $A_\nu^\pm/Z_\nu$  の個数ベクトル  $\Phi_n$  への作用において、個数ベクトルでまとめられない残余項が  $\nu \rightarrow \infty$  の極限で消えることを期待する。このとき、残った係数から相互作用 フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  が決まり、 $C^\pm$  が  $B^\pm$  や個数作用素  $N$  の単純な組合せで表されることになる。極限の意味は、数学的には、量子中心極限定理として定式化される。さらに、隣接作用素  $A_\nu$  のスペクトル分布の近似を与えることになる  $C^+ + C^-$  の分布は、定理 1.5 に基づいて容易に求められることも期待される。

## 3 量子中心極限定理 (個数作用素が現れない場合)

### 3.1 グラフの成長の仕方に対する仮定

ここで扱うグラフ  $G = (V, E)$  に対して、まず、次の条件を仮定する。(2.8) と比較せよ。

(A1) すべての辺の端点は異なる階層に属している。すなわち、

$$\omega_+(x) + \omega_-(x) = \kappa, \quad x \in V. \quad (3.1)$$

言い換えれば、 $G$  の隣接行列  $A$  に対して  $\hat{A} = 0$  が成り立つ。

この条件の下では、 $\omega_+$  は補助的には用いることはあるにせよ、計算結果を表示するのに  $\omega_+$  に関する量を用いる必要はない。そこで、簡単のため、

$$\begin{aligned} \omega_n &= \omega_{-,n} = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \omega_-(x), \\ \sigma_n^2 &= \sigma_{-,n}^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} (\omega_-(x) - \omega_n)^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \omega_-(x)^2 - \omega_n^2, \end{aligned}$$

とおくことにする。グラフの階層化が無限に続く場合は、

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_n \geq 1, \quad n \geq 2.$$

グラフの階層化が  $V = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$  のように有限で終わる場合は,

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 \geq 1, \quad \dots, \quad \omega_n = \kappa \geq 1, \quad \omega_{n+1} = \cdots = 0, \quad (3.2)$$

となる. 一般に,  $V_n \neq \emptyset, n \geq 1$ , のときは, すべての  $x \in V_n$  は必ず  $V_{n-1}$  の少なくとも1点と辺で結ばれているから,  $\omega_-(x) \geq 1$ . よって, 平均値も  $\omega_n \geq 1$  である.

次に,  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  の成長の仕方に関わる条件を示す. グラフにかかわる量や構造には添字  $\nu$  をつけて表す. それぞれのグラフは, いつも通り階層化される:

$$V^{(\nu)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n^{(\nu)}.$$

付随するヒルベルト空間を

$$\Gamma(\mathcal{G}_\nu) = \sum_n \oplus \mathbb{C} \Phi_n^{(\nu)}, \quad \Phi_n^{(\nu)} = |V_n^{(\nu)}|^{-1/2} \sum_{x \in V_n^{(\nu)}} \delta_x,$$

とする.  $\mathcal{G}_\nu$  の次数を  $\kappa(\nu)$  で表す.

(A2)  $\lim_\nu \kappa(\nu) = \infty$ ;

(A3) 各  $n \geq 0$  に対して極限

$$\omega_n \equiv \lim_\nu \omega_n^{(\nu)} < \infty$$

が存在する. ( $n = 0, 1$  に対しては, 仮定するまでもなく  $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1$  である.)

(A4) 各  $n \geq 0$  に対して

$$\lim_\nu \sigma_n^{(\nu)} = 0.$$

( $n = 0, 1$  に対しては, 仮定するまでもなく成り立っている.)

(A5) 各  $n \geq 1$  に対して

$$W_n \equiv \sup_\nu W_n^{(\nu)} < \infty, \quad W_n^{(\nu)} = \max\{\omega_-(x); x \in V_n^{(\nu)}\}.$$

後で, (A3), (A4) と同値な条件を命題 3.8 で示す. 上記の条件から, 粗くいって, グラフは上方に向かって成長してゆくことになる. より詳しくは,

**命題 3.1** 連結正則グラフの成長列  $\{\mathcal{G}_\nu\}$  が (A1), (A2), (A3) をみたすとする. このとき, 各  $n \geq 1$  に対して, ある  $\nu_0 = \nu_0(n)$  が存在して,  $\nu \geq \nu_0$  なるすべての  $\nu$  に対して  $V_n^{(\nu)} \neq \emptyset$  となる. 特に, すべての  $n \geq 1$  に対して  $\omega_n \geq 1$  である.



**証明** 背理法による. 結論を否定すると,  $V_n^{(\nu_i)} \neq \emptyset, V_{n+1}^{(\nu_i)} = \emptyset$  をみたす  $n \geq 1$  と成長パラメータの部分列  $\nu_1 < \nu_2 < \dots \rightarrow \infty$  がとれる. 条件 (A1) より, 任意の  $x \in V_n^{(\nu_i)}$  に対して  $\omega_-(x) = \kappa(\nu_i)$  であるから,  $V_n^{(\nu_i)}$  上で平均を取って  $\omega_n^{(\nu_i)} = \kappa(\nu_i)$ . これは (A2), (A3) と両立できない. これが示したいことであつた. 最後の主張のために, 各  $n \geq 1$  に対して, 命題にあるような  $\nu_0$  を選べば,  $\nu \geq \nu_0$  なる限り, 任意の  $x \in V_n^{(\nu)}$  に対して  $\omega_-(x) \geq 1$  なので, 平均値も  $\omega_n^{(\nu)} \geq 1$ . よって, その極限も  $\omega_n \geq 1$  である. ■

条件 (A5) は, グラフが成長してゆくときの上方向へのび方にある種の一様性を保証する.

**命題 3.2** 連結正則グラフの成長列  $\{\mathcal{G}_\nu\}$  が (A1), (A2), (A5) をみたすとき, 任意の  $n \geq 1$  に対して, ある  $\nu_0 = \nu_0(n)$  が存在して,  $\nu \geq \nu_0$  なる限り, すべての  $x \in V_{n-1}^{(\nu)}$  は上方にのびる辺を有する. 特に,  $\nu \geq \nu_0$  なる限り  $V_n^{(\nu)} \neq \emptyset$  である.

**証明**  $n$  に関する帰納法で証明する.  $n = 1$  のときは明らかである.  $n > 1$  として  $n - 1$  までは成立を仮定する. (A1) によって

$$\omega_+^{(\nu)}(x) = \kappa(\nu) - \omega_-^{(\nu)}(x), \quad x \in V_{n-1}^{(\nu)}, \quad \nu \geq \nu_0.$$

(A5) によって,

$$\omega_+^{(\nu)}(x) \geq \kappa(\nu) - W_{n-1}^{(\nu)} \geq \kappa(\nu) - W_{n-1}.$$

$W_{n-1}$  は  $\nu$  に無関係な定数なので, (A2) によって,

$$\lim_{\nu} \min\{\omega_+^{(\nu)}(x); x \in V_{n-1}^{(\nu)}\} = \infty.$$

特に, ある  $\nu_1 \geq \nu_0$  が存在して

$$\min\{\omega_+^{(\nu)}(x); x \in V_{n-1}^{(\nu)}\} \geq 1, \quad \nu \geq \nu_1.$$

よって,  $\nu \geq \nu_1$  のとき, すべての  $x \in V_{n-1}^{(\nu)}$  は上方にのびる辺をもつ. 特に,  $V_n^{(\nu)} \neq \emptyset$  である. ■

### 3.2 主定理

次の結果が我々の量子中心極限定理である.

**定理 3.3**  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  を条件 (A1)–(A5) をみたす連結正則グラフの成長列であるとし,  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  を  $\lambda_n = \omega_1 \dots \omega_n$  に付随する相互作用フォック空間とする. このとき,

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \dots \frac{A_\nu^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_k^{(\nu)} \right\rangle_{\ell^2(V^{(\nu)})} = \langle \Phi_j, B^{\epsilon_m} \dots B^{\epsilon_1} \Phi_k \rangle_{\Gamma}, \quad j, k \geq 0, \quad (3.3)$$

がすべての  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{\pm\}$ ,  $m \geq 1$ , に対して成り立つ.

命題 3.2 によって、極限の相互作用フォック空間は必ず無限次元 (よりの確には無限階層) となる。定理 3.3 において、特に  $j = k = 0$  ととれば、真空状態に関する主張となる。言い替えれば、

**定理 3.4**  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  を条件 (A1)–(A5) をみたす連結正則グラフの成長列であるとする。このとき、 $\mathcal{G}_\nu$  の隣接作用素  $A_\nu$  の正規化された量子的要素  $A_\nu^\pm / \sqrt{\kappa(\nu)}$  は、 $\lambda_n = \omega_1 \dots \omega_n$  に付随する相互作用フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  の生成・消滅作用素  $B^\pm$  に確率収束する。

さらに、古典論に還元して、

**系 3.5**  $\mu$  を相互作用フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  に付随する確率測度とすると、

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_0^{(\nu)}, \left( \frac{A_\nu}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \right)^m \Phi_0^{(\nu)} \right\rangle_{\ell^2(V^{(\nu)})} = \int_{\mathbf{R}} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つ。

この章の残りは、定理 3.3 の証明に充てられる。

### 3.3 各階層の大きさ

$\mathcal{G} = (V, E)$  を連結な  $\kappa$ -正則グラフとし、 $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$  をその階層化とする。さらに条件 (A1) がみたされているものとする。このとき、各階層の大きさの評価を与えておく。

**補題 3.6**  $n \geq 0$  で  $V_n \neq \emptyset$  ならば、

$$\omega_{n+1}|V_{n+1}| = \kappa|V_n| \left(1 - \frac{\omega_n}{\kappa}\right). \quad (3.4)$$

**証明** まず、 $V_{n+1} \neq \emptyset$  の場合を考えよう。端点を  $V_n$  内にもつ辺の総数は  $\kappa|V_n|$  である。これを上にのびている辺と下にのびている辺の 2 つに分けて数えると、

$$\begin{aligned} \kappa|V_n| &= \sum_{x \in V_n} \omega_+(x) + \sum_{x \in V_n} \omega_-(x) \\ &= \sum_{y \in V_{n+1}} \omega_-(y) + \sum_{x \in V_n} \omega_-(x) = \omega_{n+1}|V_{n+1}| + \omega_n|V_n|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

これが求めるべき式である。 $n = 0$  でも  $\omega_0 = 0$  と定めてあるので、(3.4) はそのまま成り立つ。グラフの階層化が  $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$  のように  $V_n$  で終わってしまい、 $V_{n+1} = \emptyset$  の場合は、 $\omega_{n+1}$  が定義されないが、 $\omega_{n+1}|V_{n+1}| = 0$  として (3.5) はやはり成り立つ。■

**補題 3.7** グラフの階層化  $V = V_0 \cup V_1 \cup \dots$  において、ある階層  $V_n$  が  $V_n \neq \emptyset$  であれば、 $\omega_1 \geq 1, \dots, \omega_n \geq 1$  であって、

$$|V_n| = \frac{\kappa^n}{\omega_1 \dots \omega_n} + O(\kappa^{n-1})$$

が成り立つ。実際、 $O(\kappa^{n-1})$  は  $\kappa$  の  $(n-1)$  次多項式である。

**証明**  $\omega_1 \geq 1, \dots, \omega_n \geq 1$  については既に述べた. (3.4) を繰り返して用いて,

$$\omega_1 \dots \omega_n |V_1| \dots |V_n| = \kappa^n |V_0| \left(1 - \frac{\omega_0}{\kappa}\right) \dots |V_{n-1}| \left(1 - \frac{\omega_{n-1}}{\kappa}\right).$$

ここで,  $|V_0| = 1, \omega_0 = 0$  に注意して,

$$|V_n| = \frac{\kappa^n}{\omega_1 \dots \omega_n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\omega_k}{\kappa}\right)$$

を得て主張は示された. ■

さて, グラフの成長列  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  に戻ろう. 条件 (A3), (A4) に代わる条件として, 次のものを考えよう.

(A3') 各  $n$  に対して,  $\nu$  に依存しない定数  $\omega_n$  が存在して,

$$\lim_{\nu} \frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) = \omega_n\}|}{|V_n^{(\nu)}|} = 1.$$

実際, 次の主張が成り立つ.

**命題 3.8** (A1), (A2), (A5) の下で,  $(A3') \iff (A3), (A4)$ .

**証明**  $(\implies)$  まず, 集合  $V_n^{(\nu)}$  を 2 つに分割する:

$$U_{\text{reg}}^{(\nu)} = \{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) = \omega_n\} \quad U_{\text{sing}}^{(\nu)} = \{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) \neq \omega_n\}.$$

添字  $n$  は省略してある.  $\omega_-(x)$  の平均値であるが

$$\begin{aligned} \omega_n^{(\nu)} &= \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in V_n^{(\nu)}} \omega_-(x) \\ &= \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in U_{\text{reg}}^{(\nu)}} \omega_-(x) + \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in U_{\text{sing}}^{(\nu)}} \omega_-(x) \\ &= \frac{|U_{\text{reg}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} \omega_n + \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in U_{\text{sing}}^{(\nu)}} \omega_-(x). \end{aligned}$$

条件 (A5) によって,  $x \in V_n^{(\nu)}$  であれば  $\omega_-(x) \leq W_n$  であることに注意して,

$$|\omega_n^{(\nu)} - \omega_n| \leq \left(1 - \frac{|U_{\text{reg}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|}\right) \omega_n + \frac{|U_{\text{sing}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} W_n \leq \frac{|U_{\text{sing}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} (\omega_n + W_n).$$

**補題 3.7** と仮定 (A3') によって,

$$\lim_{\nu} \frac{|U_{\text{sing}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} = 0.$$

$$\lim_{\nu} \omega_n^{(\nu)} = \omega_n$$

となり, (A3) が示された. 次に, 分散について見てゆこう. ミンコフスキーの不等式によって,

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(\nu)} &= \left\{ \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in V_n^{(\nu)}} (\omega_-(x) - \omega_n^{(\nu)})^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in V_n^{(\nu)}} (\omega_-(x) - \omega_n)^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{1}{|V_n^{(\nu)}|} \sum_{x \in V_n^{(\nu)}} (\omega_n - \omega_n^{(\nu)})^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

第1項は,

$$|\omega_-(x) - \omega_n| \leq \omega_-(x) + \omega_n \leq W_n + \omega_n$$

に注意し, 第2項は  $x$  に依存しない定数の和であることから,

$$\sigma_n^{(\nu)} \leq \left( \frac{|U_{\text{sing}}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} \right)^{1/2} (W_n + \omega_n) + |\omega_n - \omega_n^{(\nu)}|.$$

よって, 前半の結果を合わせて,

$$\lim_{\nu} \sigma_n^{(\nu)} = 0$$

を得る. これが (A4) である.

( $\Leftarrow$ )  $n \geq 1$  は固定しておく. 条件 (A3) から, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある  $\nu_0$  が存在して,

$$|\omega_n^{(\nu)} - \omega_n| < \epsilon, \quad \nu \geq \nu_0,$$

が成り立つ.  $x \in V_n^{(\nu)}$  が  $|\omega_-(x) - \omega_n| \geq 2\epsilon$  をみたしているならば,

$$|\omega_-(x) - \omega_n^{(\nu)}| \geq |\omega_-(x) - \omega_n| - |\omega_n - \omega_n^{(\nu)}| \geq \epsilon$$

である. よって,

$$\frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; |\omega_-(x) - \omega_n| \geq 2\epsilon\}|}{|V_n^{(\nu)}|} \leq \frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; |\omega_-(x) - \omega_n^{(\nu)}| \geq \epsilon\}|}{|V_n^{(\nu)}|}.$$

ここで, 右辺にチェビシエフの不等式を適用すれば,

$$\frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; |\omega_-(x) - \omega_n| \geq 2\epsilon\}|}{|V_n^{(\nu)}|} \leq \left( \frac{\sigma_n^{(\nu)}}{\epsilon} \right)^2 \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

一方,  $\omega_-(x)$  は整数の値しか取らないので,  $\omega_n$  が整数でないとする,  $\epsilon > 0$  を小さく取ることと,

$$V_n^{(\nu)} = \{x \in V_n^{(\nu)}; |\omega_-(x) - \omega_n| \geq 2\epsilon\}$$

を得る. しかし, これは (3.6) に矛盾する. したがって,  $\omega_n$  は整数である. そうすると, (3.6) において, 再び  $\epsilon > 0$  を小さく取って,

$$\frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) \neq \omega_n\}|}{|V_n^{(\nu)}|} = \frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; |\omega_-(x) - \omega_n| \geq 2\epsilon\}|}{|V_n^{(\nu)}|} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

よって,

$$\lim_{\lambda} \frac{|\{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) = \omega_n\}|}{|V_n^{(\nu)}|} = 1.$$

これが示したかったことである. ■

**注意 3.9** 隣接作用素の量子的成分に対する中心極限定理を最初に論じたのは Hashimoto [14] である. その論文では, 定理 3.3 の主張が, 群のケーリーグラフに対して条件 (A1), (A2), (A5) と

(A3'') 各  $n$  に対して,  $\nu$  に依存しない定数  $\omega_n$  と  $C_n$  が存在して,

$$|\{x \in V_n^{(\nu)}; \omega_-(x) \neq \omega_n\}| \leq C_n \kappa(\nu)^{n-1},$$

がすべての  $n \geq 0$  と  $\nu$  について成り立つ;

を仮定して証明されている. (実際は, (A5) よりやや強い仮定において, 個数ベクトルだけではなく, その無限和で表されるベクトルに関する行列成分の収束も示されている.) 条件 (A3'') は, 大雑把には, 階層  $V_n^{(\nu)}$  から “低次元” 部分集合を除いた “大多数” の頂点が丁度  $\omega_n$  本の下にのびる辺を有するというを意味する. 補題 3.7 より明らかに, (A3'')  $\implies$  (A3'). その後, Hora–Obata [22] は, Hashimoto の定理を群構造を用いないで定式化し, 連結正則グラフに対する定理 3.3 の主張を条件 (A1), (A2), (A3''), (A5) の下で証明した. 本論文のポイントは, 条件 (A3'') を弱めたことにある.

### 3.4 誤差項の評価

$A^\pm \Phi_n$  における誤差項の評価を行う. 具体的な表示式は補題 2.3, 2.4 にあるが, 条件 (A1) より  $\dot{A} = 0$  であることに注意して再録する. まず, 補題 2.3 から,  $n \geq 0$  に対して

$$\frac{A^+}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n = \omega_{n+1} \left( \frac{|V_{n+1}|}{\kappa |V_n|} \right)^{1/2} \Phi_{n+1} + \frac{1}{(\kappa |V_n|)^{1/2}} \sum_{y \in V_{n+1}} (\omega_-(y) - \omega_{n+1}) \delta_y. \quad (3.7)$$

同様に, 補題 2.4 と

$$\begin{aligned} \omega_{+,n-1} &= \kappa - \omega_{-,n-1} = \kappa - \omega_{n-1}, \\ \omega_+(z) - \omega_{+,n-1} &= (\kappa - \omega_-(z)) - (\kappa - \omega_{n-1}) = \omega_{n-1} - \omega_-(z) \end{aligned}$$

$$\frac{A^-}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n = \left(1 - \frac{\omega_{n-1}}{\kappa}\right) \left(\frac{\kappa|V_{n-1}|}{|V_n|}\right)^{1/2} \Phi_{n-1} + \frac{1}{(\kappa|V_n|)^{1/2}} \sum_{z \in V_{n-1}} (\omega_{n-1} - \omega_-(z)) \delta_z. \quad (3.8)$$

これは  $n \geq 1$  で意味を持つが,  $n = 0$  なら

$$\frac{A^-}{\sqrt{\kappa}} \Phi_0 = 0. \quad (3.9)$$

これらの作用を統一的に表すために

$$\gamma_n^+ = \omega_n \left(\frac{|V_n|}{\kappa|V_{n-1}|}\right)^{1/2}, \quad n \geq 1, \quad (3.10)$$

$$\gamma_n^- = \left(1 - \frac{\omega_n}{\kappa}\right) \left(\frac{\kappa|V_n|}{|V_{n+1}|}\right)^{1/2}, \quad n \geq 0, \quad (3.11)$$

$$S_n^+ = \frac{1}{(\kappa|V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} (\omega_-(y) - \omega_n) \delta_y, \quad n \geq 1, \quad (3.12)$$

$$S_n^- = \frac{1}{(\kappa|V_{n+1}|)^{1/2}} \sum_{z \in V_n} (\omega_n - \omega_-(z)) \delta_z, \quad n \geq 0, \quad (3.13)$$

とおく. 明らかに,

$$\frac{A^\epsilon}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n = \gamma_{n+\epsilon}^\epsilon \Phi_{n+\epsilon} + S_{n+\epsilon}^\epsilon, \quad \epsilon = \pm, \quad n \geq 0, \quad (3.14)$$

となる. (3.9) を含めるために,  $\gamma_{-1}^- \Phi_{-1} = S_{-1}^- = 0$  とおく.

さて,  $m \geq 1$  として  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{\pm\}$  が与えられているとしよう. (3.14) を繰り返し用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n &= \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \gamma_{n+\epsilon_1+\epsilon_2}^{\epsilon_2} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}^{\epsilon_m} \Phi_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_{k+1}}}{\sqrt{\kappa}} S_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}^{\epsilon_k}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ただし,

$$n + \epsilon_1, \quad n + \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \dots, \quad n + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_m, \quad (3.16)$$

は, すべて  $\geq 0$  であるとした. これらの中に負の数が含まれるときは,

$$\frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n = 0$$

となる. なぜならば  $\delta_y \in \ell^2(V_n)$  は  $A^{\epsilon_1}, \dots, A^{\epsilon_m}$  が順に作用することで, 対応する階層が上下するが,  $n + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_k < 0$  となった段階で 0 になるからである.

(3.15) の一般項を評価するために定数を準備しておく. まず,  $k \geq 1$  に対して

$$W_k = \max\{\omega_-(x); x \in V_k\} \quad (3.17)$$

とおく.  $W_k \leq \kappa$  は明らかである. 次に,  $n \geq 1$  と  $q \geq 0$  に対して  $M_{n,q}$  を

$$M_{n,q} = \begin{cases} \max\{W_{k_1} W_{k_2} \dots W_{k_q}; 1 \leq k_1, k_2, \dots, k_q \leq n\}, & q \geq 1, \\ 1, & q = 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

と定義する.

**補題 3.10**  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{\pm\}$ ,  $m \geq 1$ , が任意に与えられたとして, そのうち  $+$  の個数を  $p$  とし,  $-$  の個数を  $q$  とする. このとき, 任意の  $n \geq 1$  で  $n+p-q \geq 0$  をみたすものに対して,

$$\left| \left\langle \Phi_{n+p-q}, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \dots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ \right\rangle \right| \leq \sigma_n M_{n+p,q} \left( \frac{\kappa^{2p-m} |V_n|}{|V_{n+p-q}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|V_n|}{\kappa |V_{n-1}|} \right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

**証明** 既に述べたように, (3.16) の中に負の数があるときは, 左辺は 0 となる. したがって, (3.16) はすべて  $\geq 0$  と仮定して証明すればよい. 定義から

$$\begin{aligned} \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \dots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ &= \frac{1}{(\kappa |V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} (\omega_-(y) - \omega_n) \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \dots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} \delta_y \\ &= \frac{\kappa^{-m/2}}{(\kappa |V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} (\omega_-(y) - \omega_n) A^{\epsilon_m} \dots A^{\epsilon_1} \delta_y. \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで, 新しい記号として,  $\epsilon = \pm$  に応じて,

$$y \xrightarrow{\epsilon} z = \begin{cases} y \prec z & \epsilon = + \\ y \succ z & \epsilon = - \end{cases}$$

を用いる.  $y, z \in V$  に対して,

$$w(y; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m; z) = |\{(z_1, \dots, z_{m-1}) \in V^{m-1}; y \xrightarrow{\epsilon_1} z_1 \xrightarrow{\epsilon_2} z_2 \dots \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} z_{m-1} \xrightarrow{\epsilon_m} z\}|$$

とおく. これは,  $y$  を始点として, 辺の向きを順に  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  ととって  $z$  に至る道の個数である. そうすれば, (3.20) は,

$$\frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \dots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ = \frac{\kappa^{-m/2}}{(\kappa |V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} \sum_{z \in V_{n+p-q}} (\omega_-(y) - \omega_n) w(y; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m; z) \delta_z.$$

したがって,

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{n+p-q}, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \dots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ \right\rangle &= \frac{1}{|V_{n+p-q}|^{1/2}} \frac{\kappa^{-m/2}}{(\kappa |V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} \sum_{z \in V_{n+p-q}} (\omega_-(y) - \omega_n) w(y; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m; z). \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで,  $y \in V_n$  を固定した

$$\sum_{z \in V_{n+p-q}} w(y; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m; z) \quad (3.22)$$

は  $y$  を始点として, 辺を向き  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  に従って辿るときの道の総数に一致する. その道の途中の  $z \in V_k$  から  $+$  の向き出ている辺の個数は  $\kappa - \omega_-(z)$  であり, 一様に  $\kappa$  以下である. 同じ  $z \in V_k$  から  $-$  の向き出ている辺の個数は  $\omega_-(z)$  であり, これは (3.17) で定義した  $W_k$  以下である. (3.22) はそれらの積で求められる.  $+$  の向きが  $p$  回現れることと,  $-$  の向きが  $q$  回現れ,  $y \in V_n$  を出発し  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  の方向をたどってできる道が通過する階層は  $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n+p}$  に含まれることから, (3.18) を用いて,

$$\sum_{z \in V_{n+p-q}} w(y; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m; z) \leq \kappa^p M_{n+p,q}$$

のように評価される. 右辺は  $y \in V_n$  の取り方によらない. これを用いると, (3.21) の評価が得られる. 実際,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \Phi_{n+p-q}, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ \right\rangle \right| &\leq \frac{\kappa^p M_{n+p,q}}{|V_{n+p-q}|^{1/2}} \frac{\kappa^{-m/2}}{(\kappa|V_{n-1}|)^{1/2}} \sum_{y \in V_n} |\omega_-(y) - \omega_n| \\ &\leq \frac{\kappa^p M_{n+p,q}}{|V_{n+p-q}|^{1/2}} \frac{\kappa^{-m/2}}{(\kappa|V_{n-1}|)^{1/2}} \left( \sum_{y \in V_n} |\omega_-(y) - \omega_n|^2 \right)^{1/2} |V_n|^{1/2} \\ &= \sigma_n M_{n+p,q} \left( \frac{\kappa^{2p-m}|V_n|}{|V_{n+p-q}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|V_n|}{\kappa|V_{n-1}|} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

これが証明すべき (3.19) である. ■

**補題 3.11**  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{\pm\}$ ,  $m \geq 1$ , が任意に与えられたとして, そのうち  $+$  のものの個数を  $p$ ,  $-$  のものの個数を  $q$  とする. このとき, 任意の  $n \geq 0$  で  $n+p-q \geq 0$  をみたすものに対して,

$$\left| \left\langle \Phi_{n+p-q}, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^- \right\rangle \right| \leq \sigma_n M_{n+p,q} \left( \frac{\kappa^{2p-m}|V_n|}{|V_{n+p-q}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|V_n|}{\kappa|V_{n+1}|} \right)^{1/2}. \quad (3.23)$$

**証明** 定義 (3.13) により  $S_0^- = 0$  である. よって,  $n=0$  のときは, (3.23) の左辺は 0 であり明らかに成立.  $n \geq 1$  のときは, (3.12), (3.13) から得られる  $S_n^+$  と  $S_n^-$  の関係式

$$S_n^- = - \left( \frac{|V_{n-1}|}{|V_{n+1}|} \right)^{1/2} S_n^+, \quad n \geq 1,$$

を用いれば, (3.23) は (3.19) から直ちに出る. ■



### 3.5 定理 3.3 の証明

定理では、グラフの成長列  $\mathcal{G}_\nu$  を考えるので、それに付随するさまざまな定数は成長パラメータ  $\nu$  に依存することになる。証明すべき式 (3.3) において (3.15) を用いれば、

$$\begin{aligned} & \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_\nu^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle \\ &= \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \gamma_{n+\epsilon_1+\epsilon_2}^{\epsilon_2} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}^{\epsilon_m} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \Phi_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}^{(\nu)} \right\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^m \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_\nu^{\epsilon_{k+1}}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} S_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}^{\epsilon_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで係数  $\gamma_n^\epsilon$  は  $\nu$  に依存する。 $\gamma_n^\epsilon$  の具体的な表示 (3.10), (3.11) に補題 3.6 と条件 (A3) を当てはめれば、

$$\lim_{\nu} \gamma_n^+ = \sqrt{\omega_n}, \quad \lim_{\nu} \gamma_n^- = \sqrt{\omega_{n+1}}. \quad (3.25)$$

したがって、(3.24) の第 2 項が  $\nu \rightarrow \infty$  で消えることを示すには、

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_\nu^{\epsilon_{k+1}}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} S_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}^{\epsilon_k} \right\rangle = 0 \quad (3.26)$$

を証明すれば充分である。このような内積の一般的な評価は補題 3.10, 3.11 で準備した。その一般的な結果を再録すれば、

$$\left| \left\langle \Phi_j, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^+ \right\rangle \right| \leq \sigma_n M_{n+p,q} \left( \frac{\kappa^{2p-m} |V_n|}{|V_{n+p-q}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|V_n|}{\kappa |V_{n-1}|} \right)^{1/2}, \quad (3.27)$$

$$\left| \left\langle \Phi_j, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} S_n^- \right\rangle \right| \leq \sigma_n M_{n+p,q} \left( \frac{\kappa^{2p-m} |V_n|}{|V_{n+p-q}|} \right)^{1/2} \left( \frac{|V_n|}{\kappa |V_{n+1}|} \right)^{1/2}. \quad (3.28)$$

( $j = n + p - q$  でなければ、左辺は 0 である。) 右辺の定数は、すべて成長パラメータ  $\nu$  に依存する。順に見てゆこう。まず、条件 (A5) によって

$$\sup_{\nu} M_{n+p,q}^{(\nu)} < \infty.$$

補題 3.7 から

$$\frac{\kappa^{2p-m} |V_n|}{|V_{n+p-q}|} = O(\kappa^{2p-m+n-(n+p-q)}) = O(\kappa^{p+q-m}) = O(1).$$

ここで、(A3) からランダウ記号の部分は成長パラメータ  $\nu$  に関して一様にとれるので、

$$\sup_{\nu} \frac{\kappa(\nu)^{2p-m} |V_n^{(\nu)}|}{|V_{n+p-q}^{(\nu)}|} < \infty.$$

$$\sup_{\nu} \frac{|V_n^{(\nu)}|}{\kappa(\nu)|V_{n-1}^{(\nu)}|} < \infty, \quad \lim_{\nu} \frac{|V_n^{(\nu)}|}{\kappa(\nu)|V_{n+1}^{(\nu)}|} = 0.$$

したがって, (3.27), (3.28) の右辺は, 条件 (A4) によって  $\nu \rightarrow \infty$  の極限において消えることになる. 結局, (3.24) の第 1 項のみが極限で生き残り,

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_{\nu}^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_{\nu}^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \lim_{\nu} \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \gamma_{n+\epsilon_1+\epsilon_2}^{\epsilon_2} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}^{\epsilon_m} \delta_{j, n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}.$$

これは, (3.25) と相互作用フォック空間  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  の定義から,

$$\langle \Phi_j, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_1} \Phi_n \rangle$$

に等しいことが直ちにわかる. これで主定理の証明が完成した.

## 4 ケーリーグラフからの例

### 4.1 ケーリーグラフ

離散群  $G$  を考えよう. 単位元は  $e$  で表す. 部分集合  $\Sigma \subset G$  は  $G$  の生成系で次の条件をみたすものとする:

(i)  $\sigma \in \Sigma \Rightarrow \sigma^{-1} \in \Sigma$ , すなわち,  $\Sigma^{-1} = \Sigma$ ;

(ii)  $e \notin \Sigma$ .

このとき, 2 点  $x, y \in G$  は  $yx^{-1} \in \Sigma$  をみたすときに辺をなすと定義することによって,  $G$  にはグラフの構造が導入される. これをケーリーグラフ (Cayley graph) と呼び,  $(G, \Sigma)$  と表す. ケーリーグラフは次数  $\kappa = |\Sigma|$  をもつ正則グラフであり,  $\Sigma$  が  $G$  を生成するとの仮定から連結である. 通常,  $e$  をグラフの原点として固定し, いつも通り階層化しておく.

### 4.2 正方格子 $\mathbb{Z}^N$

加法群  $\mathbb{Z}^N$  の生成元として標準基底  $g_{\pm 1} = (\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, g_{\pm N} = (0, \dots, 0, \pm 1)$  を考え合わせたケーリーグラフは  $N$ -次元正方格子である. 条件 (A1), (A2), (A3''), (A5) が容易に確かめられる. 実際,  $N \geq n$  のとき,

$$|\{x \in V_n^{(N)}; \omega_-(x) = k\}| = \binom{N}{k} \binom{n-1}{k-1} 2^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

かつ

$$|V_n^{(N)}| = \sum_{k=1}^n \binom{N}{k} \binom{n-1}{k-1} 2^k$$

が成り立つ. よって,

$$\kappa(N) = 2N, \quad \omega_n = n, \quad W_n = n$$

となる. これより, 量子中心極限定理が成り立ち, 極限は,  $\lambda_n = n!$  に付随する相互作用フォック空間, すなわちボゾンフォック空間によって記述される. 命題 1.1 を参照して, 古典論に還元した結果を記せば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \Phi_0^{(N)}, \left( \frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \Phi_0^{(N)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ここで,  $A_N/\sqrt{2N}$  は正規化された  $\mathbf{Z}^N$  の隣接行列である. これは古典的な中心極限定理を再現している.

### 4.3 等質樹木 $F_N$

$N \geq 1$  として  $F_N$  を  $N$  個の文字  $g_1, \dots, g_N$  から生成される自由群としよう. 記号の簡便さから  $g_{-i} = g_i^{-1}$  とおく.  $\Sigma_N = \{g_{\pm 1}, \dots, g_{\pm N}\}$  として定義されるケーリーグラフ  $(F_N, \Sigma_N)$  は等質樹木となる. 条件 (A1), (A2), (A3''), (A5) が容易に確かめられる. 実際, すべての  $x \neq e$  に対して  $\omega_-(x) = 1$  である. さもないと, ケーリーグラフにループが現れ,  $F_N$  の生成元がある種の関係式をみたすこととなって自由群であることに反してしまう. こうして,

$$\kappa(N) = 2N, \quad \omega_n = 1, \quad W_n = 1$$

がわかる. したがって, 極限を記述する相互作用フォック空間のパラメータは  $\lambda_n = 1, n \geq 0$ , で与えられるが, それは自由フォック空間に他ならない. 命題 1.3 を思い出せば, 正規化された隣接作用素  $A_N/\sqrt{2N}$  に対して,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \Phi_0^{(N)}, \left( \frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \Phi_0^{(N)} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4-x^2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

これは, 自由中心極限定理と呼ばれるものの原型である. 詳しくは, Hiai-Petz [17], Voiculescu-Dykema-Nica [35]などを参照されたい.

### 4.4 Coxeter 群

基本的な事項は Humphreys [26] を参照のこと.  $\Sigma = \{g_1, g_2, \dots\}$  を可算無限集合とし, いわゆる Coxeter 行列  $m(i, j) \in \{1, 2, \dots, \infty\}, i, j \in \{1, 2, \dots\}$ , を考える. 定義によって, 対角成分は  $m(i, i) = 1$ , 非対角成分は  $m(i, j) = m(j, i) \geq 2$  をみたす. 各  $N \geq 1$  に対して,  $\Sigma^{(N)} = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$  を生成系とし, 関係式

$$(g_i g_j)^{m(i, j)} = e, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

によって定義される群を  $G^{(N)}$  と書く.  $m(i, j) = \infty$  のときは,  $g_i g_j$  を位数無限大の元とする. このように定義された群  $G^{(N)}$  を Coxeter 群と総称する.

生成元  $g_i \in \Sigma$  は位数 2 をもつこと (単位元  $e$  に還元されないこと) が知られているので, ケーリーグラフ  $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$  を考えることができる. 明らかに  $\kappa(N) = N$ . すべての Coxeter 群  $G^{(N)}$  は, 条件 (A1) をみたす. さらに, Coxeter 行列のすべての非対角成分が  $m(i, j) \geq 3$ ,  $i \neq j$ , となっているような Coxeter 群は, 条件 (A2), (A3'') をみたす. その場合は, すべての  $n \geq 1$  に対して  $\omega_n = 1$  かつ  $W_n = 2$  となる<sup>5)</sup>. したがって, Coxeter 行列の非対角成分がつねに  $\geq 3$  となっているような Coxeter 群の成長列  $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$  にたいして量子中心極限定理が成り立ち, その極限は, 自由フォック空間で記述される. つまり, 状況は前節 4.3 の等質樹木と同様である. 特に, 正規化された隣接作用素  $A_N/\sqrt{N}$  の真空状態におけるスペクトル分布は Wigner 半円則に漸近する. この結果は, Fendler [12] によって, モーメントを組合せ論的に求めるという全く異なる方法によって示されている. この例の詳しい計算は Hashimoto-Hora-Obata [15] にある.

#### 4.5 対称群 (Coxeter 系)

$\mathfrak{S}_N$  の生成系として, いわゆる Coxeter 系:

$$g_1 = (12), \quad g_2 = (23), \quad \dots, \quad g_{N-1} = (N-1 N),$$

を考えよう. Coxeter 行列は

$$m(i, j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 3 & |i - j| = 1, \\ 2 & |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

これは, §4.4 で述べた Coxeter 群の条件「Coxeter 行列のすべての非対角成分が  $\geq 3$ 」に合わない. しかし, 条件 (A1), (A2), (A3''), (A5) は容易に確かめられて,

$$\kappa(N) = N, \quad \omega_n = n, \quad W_n = n$$

がわかる. よって, 極限はボゾンフォック空間によって記述され, 正規化された隣接作用素  $A_N/\sqrt{N}$  の真空状態におけるスペクトル分布は標準 Gauss 分布に漸近する.

#### 4.6 対称群 (互換すべてを生成系とする場合)

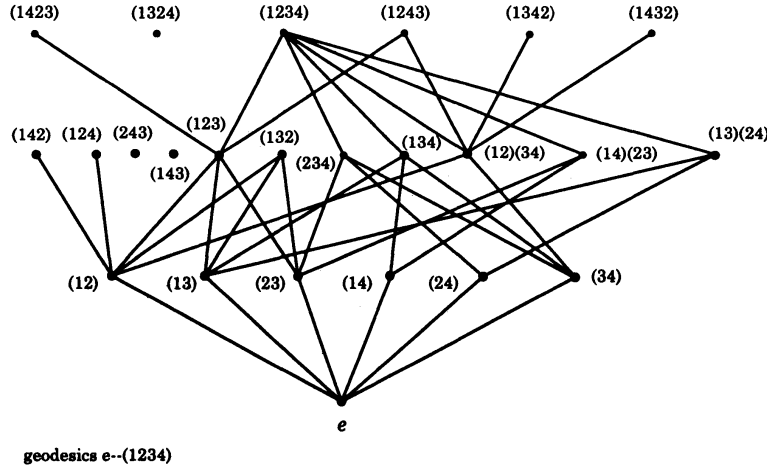
$\mathfrak{S}_N$  の生成系として, 互換全部  $\Sigma_N = \{(ij); 1 \leq i < j \leq N\}$  を取ってみよう. 一例として,  $(\mathfrak{S}_4, \Sigma_4)$  を図 4.6 に示した. ただし, 辺の一部を省略しているが, 特徴を見るために,  $e$  と  $(1234)$  を結ぶ最短経路, 及び  $(12)$ ,  $(123)$ ,  $(12)(34)$  のまわりの辺はすべて表示してある.

対称群に関する初等的知識から, (A1), (A2), (A3''), (A5) が確かめられる. 実際,

$$\kappa(N) = \frac{N(N-1)}{2}, \quad \omega_n = n, \quad W_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

がわかる. したがって, §4.5 と同様に, 極限はボゾンフォック空間で記述され, 正規化された隣接作用素  $A_N/\sqrt{N(N-1)/2}$  の真空状態におけるスペクトル分布は標準 Gauss 分布に漸近する.

<sup>5)</sup> Coxeter 群のケーリーグラフの幾何学的構造について Szwarc [33] が有用である.

図 4.1:  $(\mathfrak{S}_4, \Sigma_4)$ 

## 5 極限の多様性

連結正則グラフの成長列  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  からどのような極限分布が得られるか? については, あまり明らかではない. この章では, まず, 極限が 1-モード相互作用フォック空間で記述できるための条件を示し, それでは記述できない一例を示す. 次に, ボゾンやフェルミオンフォック空間に帰着されない例を示し, 得られる極限分布の多様性を示唆する.

### 5.1 1-モード相互作用フォック空間で記述できるための必要条件

条件 (A1) をみたす一般の正則連結グラフ  $\mathcal{G} = (V, E)$  に戻ろう. その階層化を  $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$  とし, 隣接作用素  $A$  の量子分解を  $A = A^+ + A^-$  とおく. 階層化に付随して定義される個数ベクトル  $\Phi_n$  への  $A^\pm$  の具体的な作用は, 補題 2.3, 2.4 から判る. その具体形を用いることによって

**補題 5.1**  $n \geq 0$  に対して,

$$\langle \Phi_n, A^- A^+ \Phi_n \rangle = \|A^+ \Phi_n\|^2 = \frac{|V_{n+1}|}{|V_n|} (\omega_{n+1}^2 + \sigma_{n+1}^2), \quad (5.1)$$

$$\langle \Phi_n, A^+ A^- \Phi_n \rangle = \|A^- \Phi_n\|^2 = \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|} ((\kappa - \omega_{n-1})^2 + \sigma_{n-1}^2). \quad (5.2)$$

**証明** 補題 2.3 の証明から,

$$\|A^+ \Phi_n\|^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{y \in V_{n+1}} \omega_-(y)^2 = \frac{|V_{n+1}|}{|V_n|} (\sigma_{n+1}^2 + \omega_{n+1}^2).$$

よって, (5.1) が示された. 同様にして, 補題 2.4 から,

$$\begin{aligned}
 \|A^-\Phi_n\|^2 &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{z \in V_{n-1}} \omega_+(z)^2 = \frac{1}{|V_n|} \sum_{z \in V_{n-1}} (\kappa - \omega_-(z))^2 \\
 &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{z \in V_{n-1}} \{(\kappa - \omega_{n-1}) + (\omega_{n-1} - \omega_-(z))\}^2 \\
 &= \frac{1}{|V_n|} \left\{ |V_{n-1}|(\kappa - \omega_{n-1})^2 + \sum_{z \in V_{n-1}} (\omega_{n-1} - \omega_-(z))^2 \right\} \\
 &= \frac{|V_{n-1}|}{|V_n|} ((\kappa - \omega_{n-1})^2 + \sigma_{n-1}^2).
 \end{aligned}$$

よって (5.2) が得られた. ■

**命題 5.2**  $\{\mathcal{G}_\nu = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$  を条件 (A1)–(A3) をみたす連結正則グラフの成長列とし,  $(\Gamma, \{\lambda_n\}, B^+, B^-)$  を (1 モード) 相互作用フォック空間とする. このとき,

$$\lim_\nu \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_\nu^-}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_\nu^+}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \langle \Phi_n, B^- B^+ \Phi_n \rangle \quad (5.3)$$

$$\lim_\nu \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_\nu^+}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_\nu^-}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \langle \Phi_n, B^+ B^- \Phi_n \rangle \quad (5.4)$$

が, すべての  $n \geq 0$  (ただし,  $\Gamma$  が有限階層のときは,  $\Phi_n$  の定義されている範囲) で成り立つならば, すべての  $n \geq 0$  に対して  $\lambda_n > 0$  であり (つまり, 必然的に  $\Gamma$  は無限階層であって), グラフの成長列  $\{\mathcal{G}_\nu\}$  に対して (A4) が成り立つ.

**証明** 相互作用フォック空間における生成・消滅作用素の一般的な作用 (1.1) から, 我々の仮定は

$$\lim_\nu \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_\nu^-}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_\nu^+}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \quad (5.5)$$

$$\lim_\nu \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_\nu^+}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_\nu^-}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \quad (5.6)$$

ということになる. 一方, 補題 5.1 によって, これらの左辺は成長パラメータ  $\nu$  に依存するグラフの統計量で書ける. まず, (5.5) を考えよう.

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \lim_\nu \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_\nu^-}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_\nu^+}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \lim_\nu \frac{|V_{n+1}^{(\nu)}|}{\kappa(\nu)|V_n^{(\nu)}|} (\omega_{n+1}^{(\nu)2} + \sigma_{n+1}^{(\nu)2}) \quad (5.7)$$

であるが, 補題 3.6 と仮定 (A2), (A3) によって,

$$\lim_\nu \frac{|V_{n+1}^{(\nu)}|}{\kappa(\nu)|V_n^{(\nu)}|} = \lim_\nu \frac{1}{\omega_{n+1}^{(\nu)}} \left( 1 - \frac{\omega_n^{(\nu)}}{\kappa(\nu)} \right) = \frac{1}{\omega_{n+1}} \quad (5.8)$$

であることに注意する. なお, 命題 3.1 によって, すべての  $n \geq 1$  に対して  $\omega_n \geq 1$  であったことを思い出そう. したがって, (5.7) は,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \omega_{n+1} + \frac{1}{\omega_{n+1}} \lim_{\nu} \sigma_{n+1}^{(\nu)2}, \quad n \geq 0, \quad (5.9)$$

となり,  $\Phi_n$  が定義されているような  $n$  に対しては, 極限  $\lim_{\nu} \sigma_{n+1}^{(\nu)}$  が存在することも同時にわかる.

さて, 与えられた相互作用フォック空間が有限階層であったと仮定しよう.  $\lambda_n > 0$ ,  $\lambda_{n+1} = 0$  となる  $n$  に対しても, (5.9) が成り立つはずであるが,  $\omega_{n+1} \geq 1$  と合わせると矛盾を生ずる. よって, すべての  $n \geq 0$  に対して  $\lambda_n > 0$  である.

次に, (5.6) を考えよう. 上の議論と同様に, 補題 3.6 と仮定によって,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} &= \lim_{\nu} \left\langle \Phi_n^{(\nu)}, \frac{A_{\nu}^{+}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \frac{A_{\nu}^{-}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle \\ &= \lim_{\nu} \frac{|V_{n-1}^{(\nu)}|}{\kappa(\nu)|V_n^{(\nu)}|} \left( (\kappa(\nu) - \omega_{n-1}^{(\nu)})^2 + \sigma_{n-1}^{(\nu)2} \right) \\ &= \lim_{\nu} \frac{\kappa(\nu)|V_{n-1}^{(\nu)}|}{|V_n^{(\nu)}|} \left\{ \left( 1 - \frac{\omega_{n-1}^{(\nu)}}{\kappa(\nu)} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{n-1}^{(\nu)}}{\kappa(\nu)} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

$\lim_{\nu} \omega_{n-1}^{(\nu)}$ ,  $\lim_{\nu} \sigma_{n-1}^{(\nu)}$  とともに収束するので, (5.8) から,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = \omega_n, \quad n \geq 1. \quad (5.10)$$

(5.9) と (5.10) から

$$\lim_{\nu} \sigma_n^{(\nu)} = 0, \quad n \geq 1,$$

が得られ, 証明が終わる. ■

## 5.2 極限分布の多様性

§4 において列挙した群のケーリーグラフの例では, 標準 Gauss 分布と Wigner 半円則が極限として得られた. 他の確率分布を群のケーリーグラフから自然な形で導出することは興味深いのだが, よい例は見つかっていない. しかし, 連結正則グラフの範疇なら, 様々な例が構成されそうである.

与えられた  $\kappa \geq 3$  に対して  $\kappa$ -正則グラフであって,

$$\omega_{-}(x) = \begin{cases} 1 & x \in V_n, \quad n: \text{奇数} \\ 2 & x \in V_n, \quad n \geq 2: \text{偶数} \end{cases}$$

をみたすものを 1 つ構成しよう.

1° 1点  $x_0$  をとり, 第0階層  $V_0$  とする.

2°  $\kappa$  個の点  $y_1, \dots, y_\kappa$  からなる第1階層  $V_1$  をつくり,  $V_1$  の各点と  $x_0$  を辺で結ぶ. これで  $x_0$  から  $\kappa$  本の辺がのびることになる.

3°  $V_1$  から異なる2点  $\{y_i, y_j\}$  を選び, それに対応する点  $z_{ij}$  を用意する. そのような点の全体  $\{z_{ij}; 1 \leq i < j \leq \kappa\} = V_2$  を第2階層とし, 各  $z_{ij}$  と  $y_i, y_j$  とを辺で結ぶ. この段階で, 各  $y \in V_1$  は  $\kappa$  本の辺をもつ.  $|V_2| = \kappa(\kappa - 1)/2$  である.

4° 第2階層  $V_2$  の各点  $z$  はすでに  $V_1$  の2点と辺で結ばれている. そこで, 各  $z$  に対して  $\kappa - 2$  個の新しい点を用意して  $z$  と結ぶ. ここで用意された点の全体を 第3階層  $V_3$  とする. 各  $z$  はこの段階で  $\kappa$  本の辺をもつ.

5°  $V_3$  の各点は  $V_2$  の点と1本の辺で結ばれている.  $|V_3| = \kappa(\kappa - 1)(\kappa - 2)/2$  であるから,  $V_3$  を  $\kappa$  個の点からなる部分集合  $V_{3i}, 1 \leq i \leq (\kappa - 1)(\kappa - 2)/2$ , に分割できる. それぞれの  $V_{3i}$  を  $V_1$  とみなして 3° の操作から繰り返す.

このように構成された  $\kappa$ -正則グラフを  $\mathcal{G}_\kappa$  で表そう (図 5.1 を参照). 各階層の大きさは,

$$|V_0| = 1, \quad |V_1| = \kappa, \quad |V_2| = \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2},$$

$$|V_{2n-1}| = |V_1| \left\{ \frac{(\kappa - 1)(\kappa - 2)}{2} \right\}^{n-1}, \quad |V_{2n}| = |V_2| \left\{ \frac{(\kappa - 1)(\kappa - 2)}{2} \right\}^{n-1}.$$

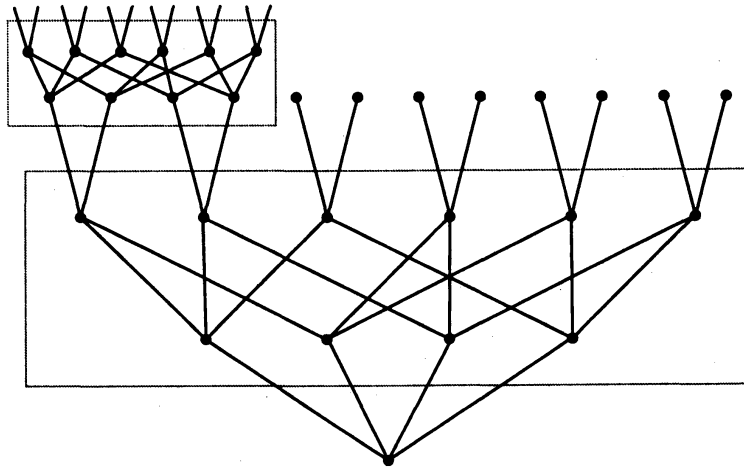


図 5.1:  $\mathcal{G}_4$  ( $\omega_{2n-1} = 1, \omega_{2n} = 2; n \geq 1$ )

この正則グラフの族  $\{\mathcal{G}_\kappa\}$  は,  $\kappa$  そのものを成長パラメータとして, 条件 (A1)–(A5) をみたす. 実際, (A3), (A4) については極限を取るまでもなく成り立ち,

$$\omega_n = W_n = \begin{cases} 1 & n: \text{奇数}, \\ 2 & n \geq 2: \text{偶数}. \end{cases} \quad (5.11)$$



他の条件は自明である。よって、極限を記述する相互作用フォック空間は、§1.2 にあげた典型例とは異なるものである。

付随する直交多項式について調べておこう。まず、 $U_n(x)$  を第 2 種 Chebyshev 多項式とする：

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

漸化式

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, \\ U_1(x) = 2x, \\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (5.12)$$

と直交関係

$$\int_{-1}^{+1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

が成り立つ<sup>6)</sup>。第 2 種 Chebyshev 多項式を用いて、

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_{2n}(x) = 2^{n/2}(U_n(z) + \sqrt{2}U_{n-1}(z)), \quad n \geq 1, \\ P_{2n+1}(x) = 2^{n/2}xU_n(z), \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (5.13)$$

として、 $\{P_n(x)\}$  を定義する。ただし

$$z = \frac{x^2 - 3}{2\sqrt{2}}$$

である。(5.12) を用いた簡単な計算によって、

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \omega_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

が示される。ここの  $\{\omega_n\}$  は (5.11) で与えられたものである。

$\{P_n(x)\}$  の直交化測度  $\mu$  の Cauchy 変換  $G(z)$  を連分数展開によって計算すると、 $\mathbb{C}^{\pm} \cap \mathbb{C}^{\text{右}}$  で

$$G(z) = \frac{1 + z^2 - \sqrt{z^4 - 6z^2 + 1}}{4z} \quad (\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0)$$

の表示を得る。 $G(z)$  の上半平面から実軸への境界値をとれば、 $\mu$  は  $[-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]$  に台をもつ確率測度

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{6 - x^2 - \frac{1}{x^2}} \chi_{[-\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1] \cup [\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1]}(x) dx + \frac{1}{2} \delta_0$$

<sup>6)</sup>  $\tilde{U}_n(x) = U_n(x/2)$  とおくと、 $\{\tilde{U}_n(x)\}$  は Wigner 半円則に関する直交多項式 ( $\tilde{U}_n(x) = x^n + \dots$  と基準化されている) になる。対応する Szegő-Jacobi 定数は  $\alpha_n \equiv 0$ ,  $\omega_n \equiv 1$  である。

であることがわかる.

上記の議論を多少変更すれば, 任意の正整数の組  $a, b, k$  に対して

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_{2n} = a, \quad \omega_{2n+1} = b, \quad n \geq 1,$$

をみたす次数  $\kappa = abk$  の正則グラフを構成することもできる. 詳しくは, Hora–Obata [24] で議論する予定である.

## References

- [1] L. Accardi and M. Bożejko: *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 663–670.
- [2] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Notions of independence related to the free group*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 201–220.
- [3] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Singleton independence*, *Banach Center Publ.* **43** (1998), 9–24.
- [4] アカルディルイジ・尾畑伸明: 代数的確率論入門 — 独立性の諸概念, 多元数理講義録 Vol. 2, 名古屋大学, 1999.
- [5] E. Bannai and T. Ito: “Algebraic Combinatorics I, Association Schemes,” Benjamin, 1984.
- [6] B. Bollobás: “Graph Theory,” Springer-Verlag, 1979.
- [7] M. Bożejko: *Deformed free probability of Voiculescu*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1227** (2001), 96–114.
- [8] M. Bożejko, B. Kümmerer and R. Speicher: *q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects*, *Commun. Math. Phys.* **185** (1997), 129–154.
- [9] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: Quantum stochastic analysis via white noise operators in weighted Fock space, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 241–272.
- [10] T. S. Chihara: “An Introduction to Orthogonal Polynomials,” Gordon and Breach, 1978.
- [11] P. Deift: “Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach,” *Courant Lect. Notes* Vol. 3, Amer. Math. Soc., 1998.
- [12] G. Fendler: *Central limit theorems for Coxeter systems and Artin systems of extra large type*, preprint 2000.
- [13] Y. Hashimoto: *Deformations of the semicircle law derived from random walks on free groups*, *Prob. Math. Stat.* **18** (1998), 399–410.
- [14] Y. Hashimoto: *Quantum decomposition in discrete groups and interacting Fock spaces*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **4** (2001), 277–287.
- [15] Y. Hashimoto, A. Hora and N. Obata: *Central limit theorems for large graphs: Method of quantum decomposition*, preprint, 2001.
- [16] Y. Hashimoto, N. Obata and N. Tabei: *A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs*, in “Quantum Information III (T. Hida and K. Saitô, Eds.),” pp. 45–57, World Scientific, 2001.
- [17] F. Hiai and D. Petz: “The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy,” Amer. Math. Soc., 2000.

- [18] A. Hora: *Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 221–246.
- [19] A. Hora: *Gibbs state on a distance-regular graph and its application to a scaling limit of the spectral distributions of discrete Laplacians*, *Probab. Theory Relat. Fields* **118** (2000), 115–130.
- [20] A. Hora: *A noncommutative version of Kerov's Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, preprint, 2001.
- [21] A. Hora: *Scaling limit for Gibbs states of the Johnson graphs*, preprint, 2002.
- [22] A. Hora and N. Obata: *Quantum decomposition and quantum central limit theorem*, to appear in "Fundamental Problems in Quantum Physics (Ed. S. Tasaki)," World Scientific.
- [23] 洞彰人・尾畑伸明: 量子分解法による隣接作用素のスペクトル解析 II: 一般の場合, to appear in 京都大学数理解析研究所講究録.
- [24] A. Hora and N. Obata: *An interacting Fock space with periodic Jacobi parameters obtained from regular graphs in large scale limit*, in preparation.
- [25] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Itô's formula and stochastic evolutions*, *Commun. Math. Phys.* **93** (1984), 301–323.
- [26] J. E. Humphreys: "Reflection Groups and Coxeter Groups," Cambridge UP, 1990.
- [27] S. Kerov: *Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **316** Série I (1993), 303–308.
- [28] H. van Leeuwen and H. Maassen: *A  $q$  deformation of the Gauss distribution*, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 4743–4756.
- [29] W. Młotkowski:  *$\Lambda$ -free probability*, preprint, 2001.
- [30] 尾畑伸明: 量子分解法によるスペクトル解析, to appear in 物性研究.
- [31] W. Schoutens: "Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials," *Lect. Notes in Stat.* Vol. 146, Springer-Verlag, 2000.
- [32] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin: "The Problem of Moments," Amer. Math. Soc., 1943.
- [33] R. Szwarc: *Structure of geodesics in the Coxeter graph of infinite Coxeter groups*, preprint, 2000.
- [34] 田部井信幸: ハミンググラフ上の量子分解と中心極限定理, 名古屋大学修士論文, 2001.
- [35] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica: "Free Random Variables," CRM Monograph Series, Amer. Math. Soc., 1992.